1.1 OBIECTUL DE STUDIU ALE DISCIPLINEI

Mașinile de danturat sunt destinate fabricației roților dințate, mai exact a danturii acestora. In fabricația danturii intervin diferite procedee tehnice cum ar fi:

-Așchiere (faza de degroșare**).** e utilizează frezarea cu diferite tipuri de scule: freze disc modul (fig.1.1), freze melc-modul (fig.1.2), etc. Uneori se utilizează mortezarea cu cuțit roată de mortezat (fig.1.3) sau cu cuțit cremalieră (fig.1.4).

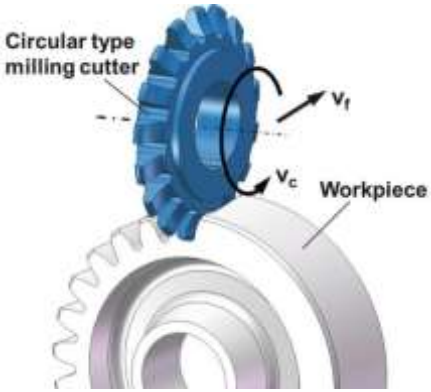

Fig.1.1

Fig.1.2

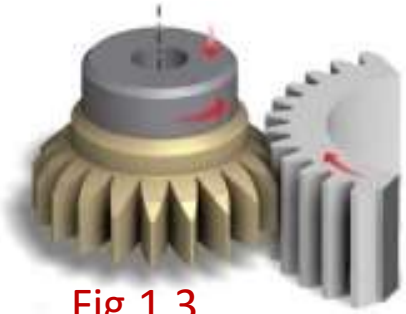

Fig.1.3

Fig.1.4

-Abraziune (faza de finisare, rectificare). Se utilizează rectificarea cu scule disc (fig.1.5, 1.6) sau cu scule melc-modul (fig. 1.7).

Fig.1.5

Fig.1.6

Fig.1.7

Cele mai întâlnite tipuri de roți dințate (angrenaje) sunt:

-**roți dințate cilindrice, angrenaj exterior cu axe paralele** cu dinți drepți: (*spur gear*, fig. 1.8), cu dinți elicoidali (*helical gear*, fig. 1.9), cu dinți în V (*herringbone gear*, fig. 1.10); **angrenaj exterior cu axe perpendiculare** (*crossed helical gear*, fig.1.11) angrenaj melc-roată melcată (*worm gear*, fig. 1.12).

Fig.1.8

Fig.1.9

Fig.1.10

Fig.1.11

Fig.1.12

Fig.1.13

-**roți dințate cilindrice, angrenaj interior cu axe paralele** cu dinți drepți sau elicoidali (*internal helical gear*, fig. 1.13),

-**roți dințate conice,** cu dinți drepți (*spur bevel gear*, fig. 1.14), cu dinți curbilinii (*spiral bevel gear*, fig. 1.15, hypoid gear, fig. 1.16)

Fig.1.14

Fig.1.15

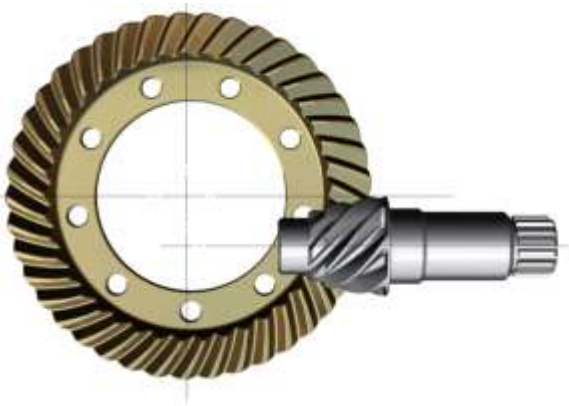

Fig.1.16

Mașinile de danturat trebuie să asigure definirea danturii pe semifabricat (cilindric sau conic) prin eliminarea materialului din golurile dintre dinți. Fiecare dinte al danturii se repetă identic, echidistant unghiular. Suprafețele de contact ale dinților (împreună cu dinții roții conjugate) trebuie să asigure funcțiile esențiale ale angrenajului:

-transmiterea mișcării de rotație strict legată (prin raportul de transfer) de caracteristicile mișcării la roata de intrare în angrenaj (fără discontinuități).

-transmiterea/transformarea momentului de torsiune fără afectarea mecanică excesivă a danturii (durabilitate).

-randament cât mai ridicat al angrenajului (frecări minime între suprafețele de contact, pierderi energetice minime)

Elementul esențial în fabricarea danturii îl reprezintă realizarea suprafețelor de contact ale dinților (de angrenare). Fie –cu titlu de exemplu- conform figurii 1.17 un dinte pe o roată dințată cilindrică cu dinți elicoidali (exemplu în fig. 1.9)

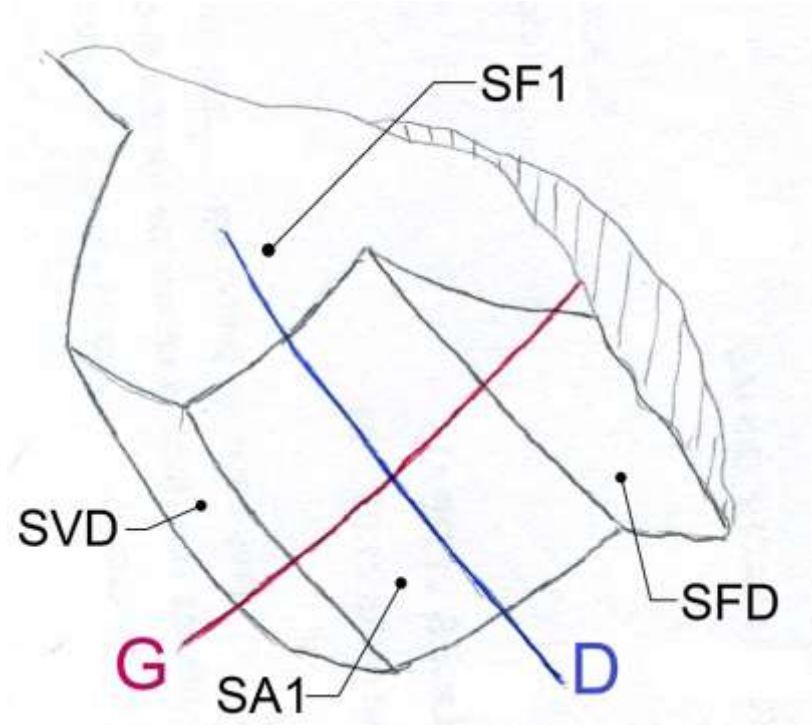

Fig.1.17

Suprafața dintelui este delimitată între suprafața vârfului de dinte SVD două suprafețe de fund de dinte (dintre care una -SFD- marcată pe figură), două suprafețe frontale plane (dintre care una -SF1- marcată pe figură) și două suprafețe de angrenare (dintre care una -SA1- marcată pe figură, cealalată -SA2- pe partea opusă). Suprafața vârfului de dinte SVD rezultă din semifabricatul roții (cilindric), la fel suprafețele frontale plane. Danturarea nu modifică aceste suprafețe. Ea operează doar în zona delimitată de SA1, SFD și SA2.

O suprafață de angrenare (aici SA1) rezultă din deplasarea unei curbe generatoare G peste o curbă directoare D. Curba generatoare G este definită într-un plan transversal al roții (paralel cu SF1). Forma și proprietățile ei sunt esențiale pentru calitatea angrenării. Curba directoare D definește tipul de dantură. Pentru drantura dreaptă D este chiar o dreaptă, pentru dantura elicoidală (numită și înclinată) D este o elice cilindrică. Cele două curbe (G și D) se definesc pe toate tipurile de roți dințate existente.

Mașinile de danturat trebuie să permită materializarea simultană a celor două curbe, generatoare G și directoare D.

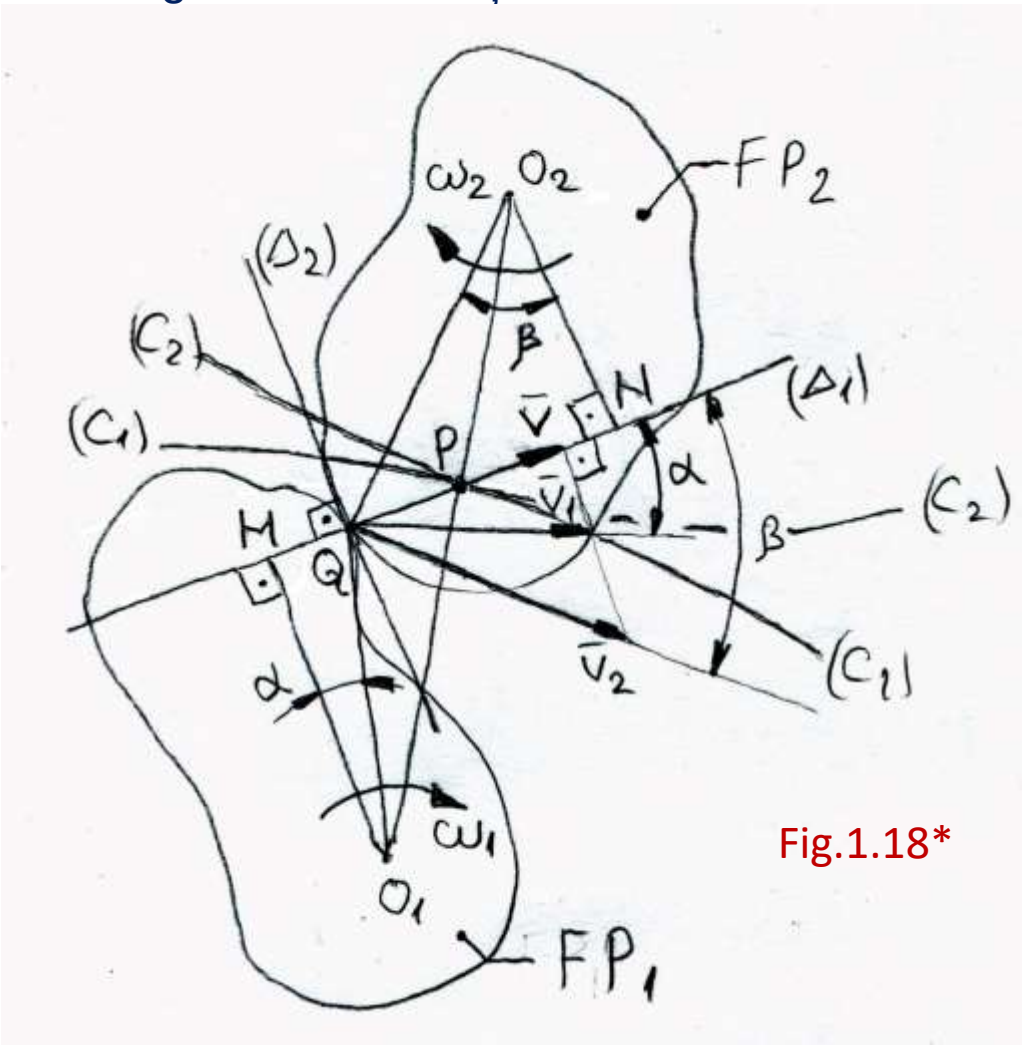

Fig.1.18*

1. 2 LEGEA ANGRENĂRII

Să cercetăm acum considerentele angrenării la nivelul punctului de contact a doi dinți ai unui angrenaj cilindric într-o secțiune plană, conform figurii 1.18. Fie două figuri plane FP_1 și FP_2 aflate în contact în punctul Q. Două porțiuni de pe aceste figuri din jurul punctului Q pot fi considerate ca aparținând a doi dinți cu contact în punctul Q, de pe două roți dințate R_1 și R_2 aflate în angrenare. Fie O_1 centrul de rotație al lui FP_1 (cu viteza unghiulară ω_1) și O_2 centrul de rotație al lui FP_2 (cu viteza unghiulară ω_2). În particular O_1 și O_2 pot fi centrele de rotație ale roților R_1 și R_2. Fie dreapta (Δ_1) normala comună la cele două figuri plane în punctul de contact Q. Fie dreapta (Δ_2) tangenta comună la cele două figuri plane în același punct Q.

*https://eng-resources.uncc.edu/unccengkit/mechanical/gears/law-of-gearing/

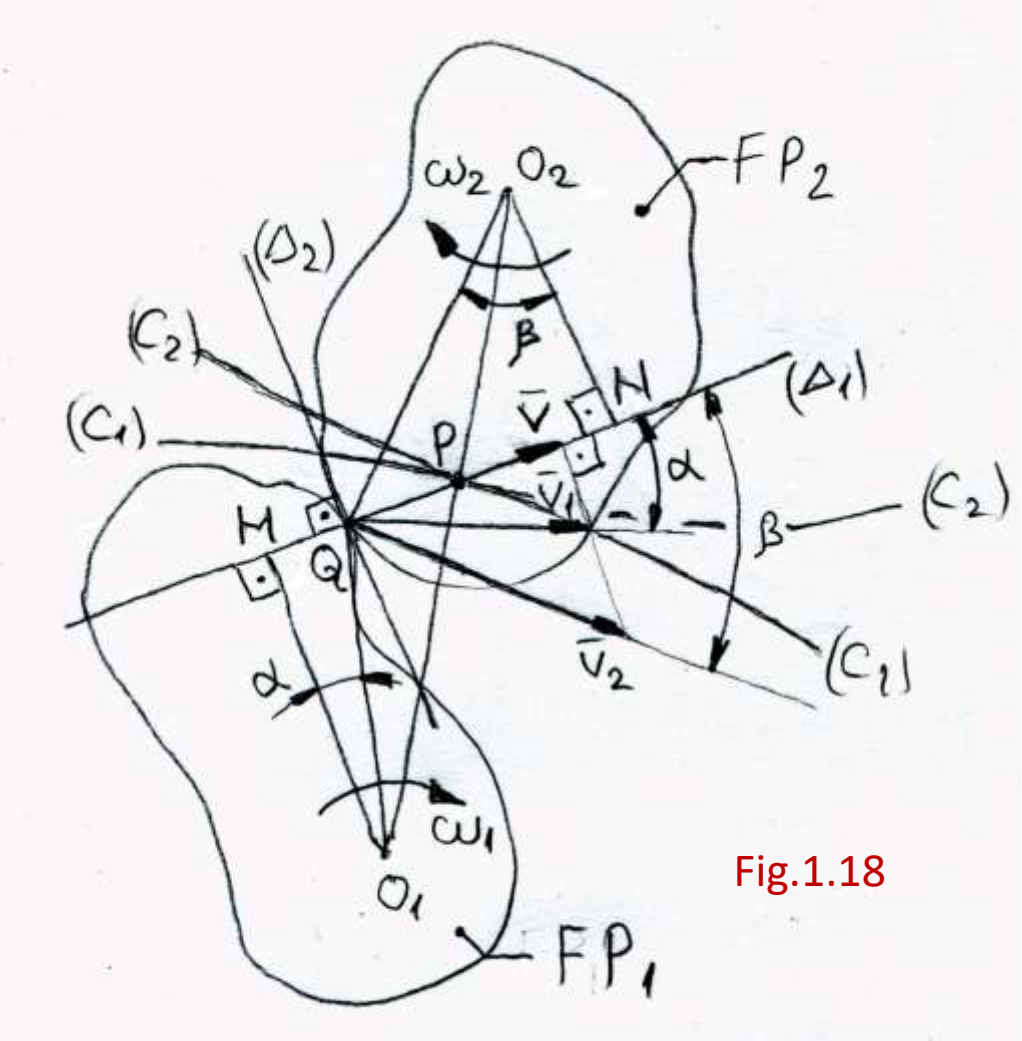

Fig.1.18

În punctul de contact Q se generează forță acțiune și reacțiune pe direcția dreptei (Δ_1). Urmare a mișcărilor ω_1 și ω_2 punctul Q se deplasează obligatoriu pe această dreaptă.

Fie v_1 viteza periferică a punctului Q raportată la punctul O_1 și asociată vitezei unghiulare ω_1. Fie v_2 viteza periferică a punctului Q raportată la punctul O_2 și asociată vitezei unghiulare ω_2. Pentru ca punctul Q să se deplaseze pe direcția (Δ_1) este obligatoriu ca vitezele v_1, v_2 să se proiecteze în mod identic (proiecția lor fiind v) pe dreapta (Δ_1). Altfel ar însemna că viteza punctului Q de pe FP_1 pe dreapta (Δ_1) este diferită de viteza punctului Q de pe FP_2 pe aceeași dreaptă. Adică cele două figuri plane nu mai au punct de contact (tangență). Identitatea proiecțiilor înseamnă:

$$v_1 \cos(\alpha) = v_2 \cos(\beta) = v \qquad (1.1)$$

Din definiția vitezelor v_1, v_2 și din considerente geometrice relația (1.1) poate fi rescrisă succesiv ca:

$$\overset{v_1}{\boxed{\omega_1 \cdot \cancel{O_1Q}}}\,\overset{\cos(\alpha)}{\frac{O_1M}{\cancel{O_1Q}}} = \overset{v_2}{\boxed{\omega_2 \cdot \cancel{O_2Q}}}\,\overset{\cos(\beta)}{\frac{O_2N}{\cancel{O_2Q}}} \qquad (1.2)$$

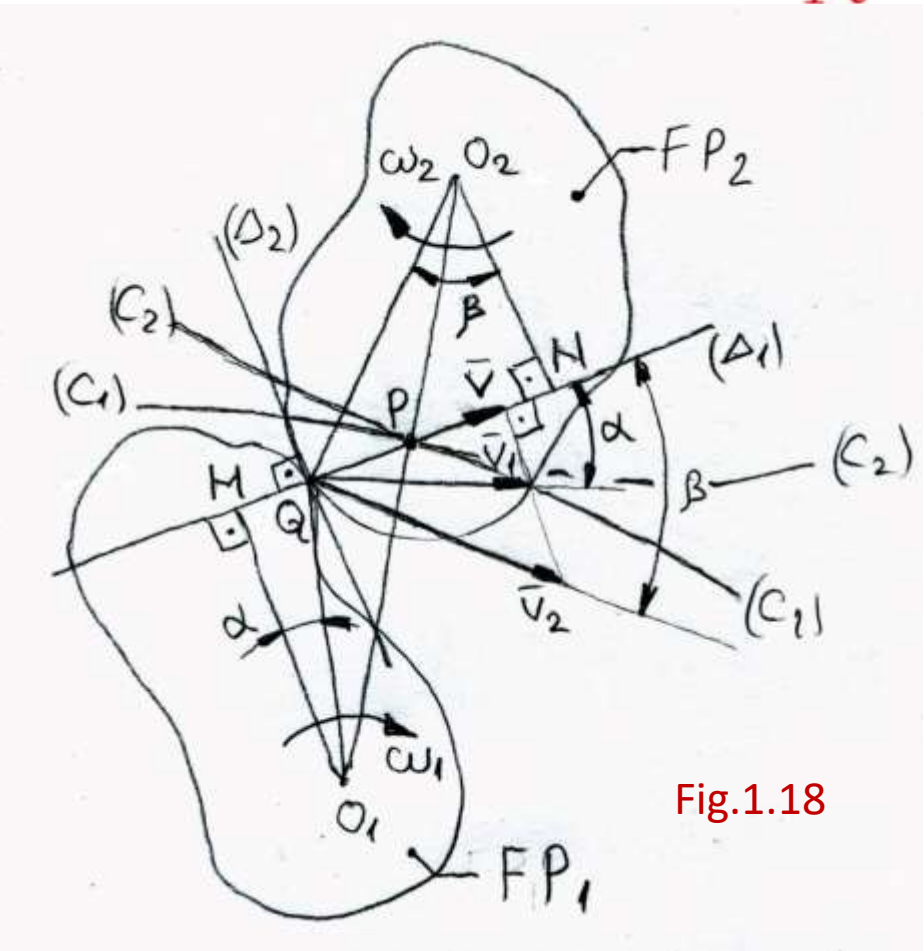

Fig.1.18

$$\omega_1 \cdot O_1M = \omega_2 \cdot O_2N \qquad (1.3)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2N}{O_1M} \qquad (1.4)$$

Din triunghiurile asemenea O_1MP și O_2NP rezultă egalitatea rapoartelor $O_2N/O_1M = O_2P/O_1P$ ceea ce transformă (1.4) în:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} \qquad (1.5)$$

Punctele O_1 și O_2 fiind fixe, rezultă că pentru a avea un raport constant ω_1/ω_2 între vitezele unghiulare (deziderat al angrenării) punctul P trebuie să fie de asemenea fix pe segmentul O_1O_2, indiferent de pozițiile unghiulare ale celor două figuri plane FP_1 și FP_2 (în particular indiferent de pozițiile roților dințate).

Punctul P (numit și pol al angrenării, *pitch point*) se află simultan pe segmentul O_1O_2 și pe normala comună (Δ_1) în punctul de contact Q. Ca atare **LEGEA ANGRENĂRII** poate fi enunțată astfel: ***Pentru un angrenaj cu raport de transfer fix, în funcțiune, în orice moment normala comună la punctul de contact a doi dinți trebuie să treacă prin polul P (fix) al angrenării.***

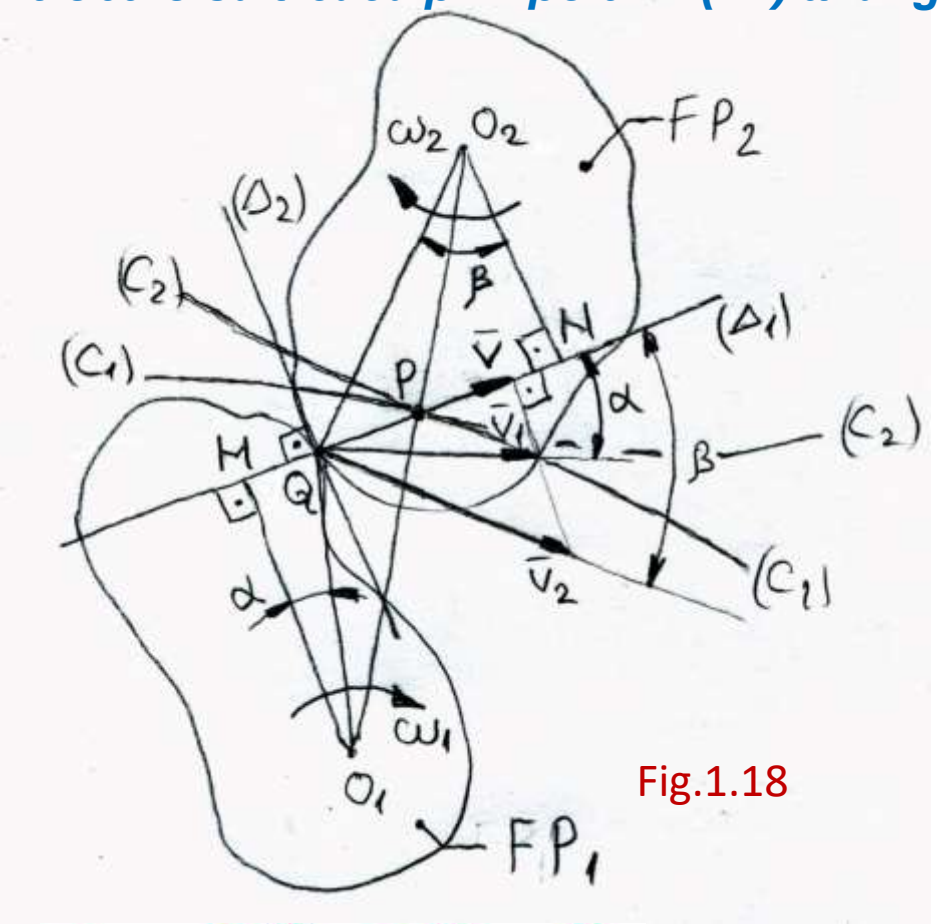

Fig.1.18

Traiectoria descrisă de punctul P pe un plan solidar cu FP_2 este evident un cerc (C_2) cu centrul în O_2 și de rază O_2P.

Traiectoria descrisă de punctul P pe un plan solidar cu FP_1 este evident un cerc (C_1) cu centrul în O_1 și de rază O_1P.

Cele două cercuri sunt tangente în P.

În cazul unui angrenaj cilindric, cele două cercuri sunt cercurile de divizare, de raze $O_1P=mZ_1$ și $O_2P=mZ_2$, cu Z_1 și Z_2 numerele de dinți, m – modulul danturii. Cu aceasta relația (1.5) devine (1.6).

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{O_2P}{O_1P}=\frac{mZ_2}{mZ_1}=\frac{Z_2}{Z_1} \qquad (1.6)$$

S-a obținut exact expresia raportului de transfer a angrenajului, deja dedusă anterior la disciplina Proiectarea mașinilor-unelte 1.

Fie dreapta (Δ_2) perpendiculară pe (Δ_1) în punctul Q (tangentă la Q). Se observă faptul că proiecțiile vitezelor v_1, v_2 pe această tangentă (fie acestea $v_{1T}=v_1\sin(\alpha)$ și $v_{2T}=v_2\sin(\beta)$) sunt diferite. Aceasta înseamnă că în punctul Q există alunecare între cele două figuri plane, măsurată pe direcția tangentei comune. Viteza de alunecare v_{AT} pe direcția tangentei comune este evident definită ca $v_{AT}=v_{2T}-v_{1T}$.

Dezvoltarea acestei relații produce:

(1.7)

$$v_{1T} = v_1 \sin(\alpha) = \omega_1 \cdot \cancel{O_1Q}\frac{QM}{\cancel{O_1Q}}$$

(1.8)

$$v_{2T} = v_2 \sin(\beta) = \omega_2 \cdot \cancel{O_2Q}\frac{QN}{\cancel{O_2Q}}$$

$$v_{AT} = v_{2T} - v_{1T} =$$

(1.9)

$$\omega_2 \cdot QN - \omega_1 \cdot QM =$$

$$\omega_2 \cdot (QP + PN) - \omega_1 \cdot (MP - QP) =$$

$$(\omega_2 + \omega_1) \cdot QP + \boxed{\omega_2 \cdot PN - \omega_1 MP}$$

de văzut relația (1.11) în continuare

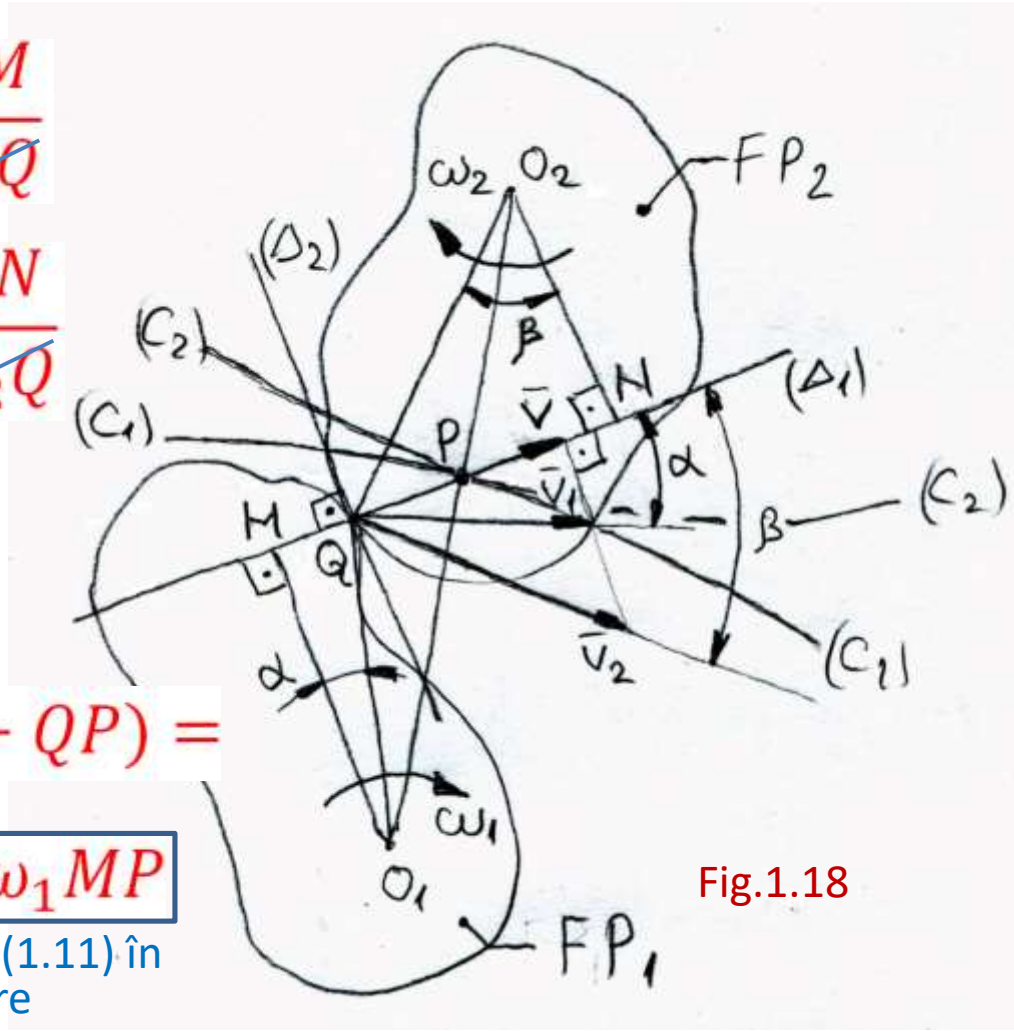

Fig.1.18

Din triunghiurile asemenea O_1MP și O_2NP rezultă egalitatea rapoartelor $NP/MP= O_2P/O_1P$ ceea ce permite completarea relației (1.5) conform cu:

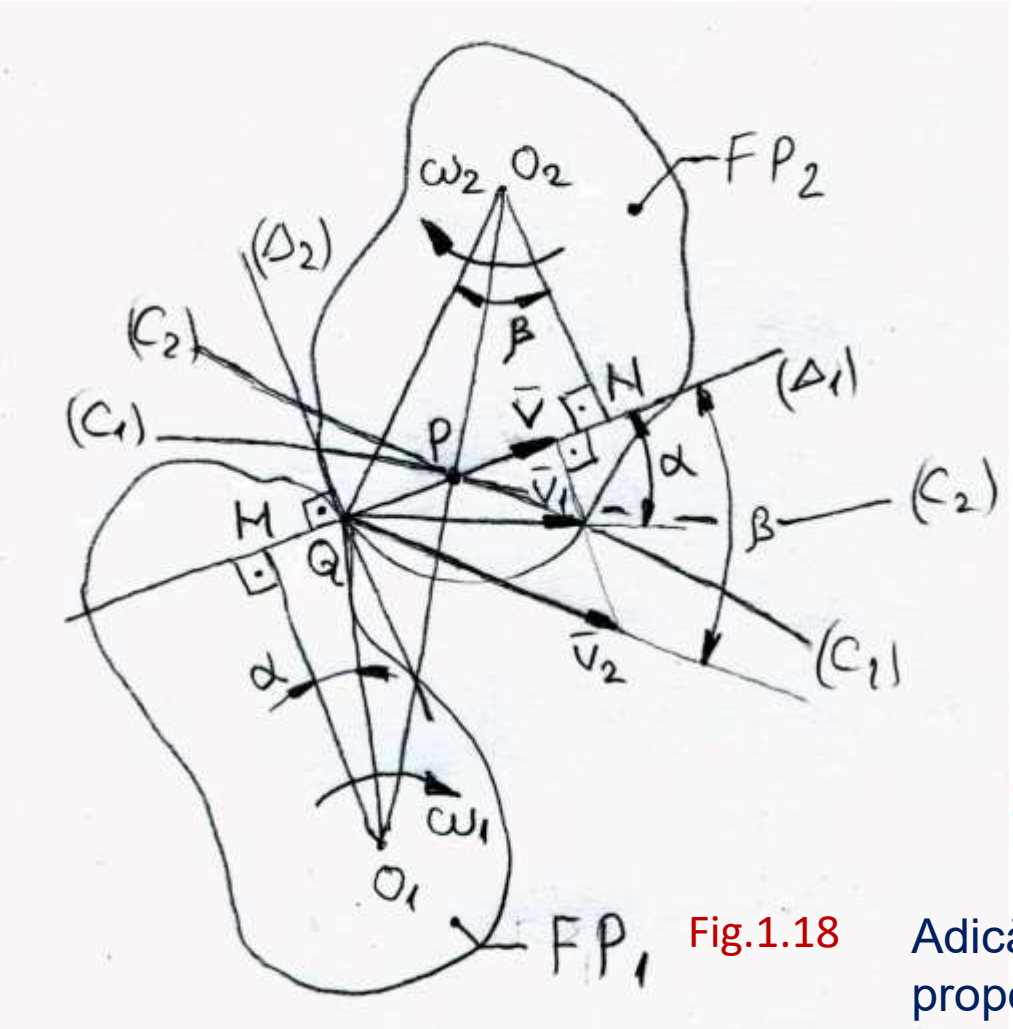

Fig.1.18

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2N}{O_1M} = \frac{NP}{MP} \qquad (1.10)$$

De unde rezultă:

$$\omega_1 \cdot MP = \omega_2 \cdot NP \qquad (1.11)$$

Această egalitate indică anularea ultimilor doi termeni din (1.9), ceea ce reduce expresie vitezei de alunecare din (1.9) la forma:

$$v_{AT} = (\omega_2 + \omega_1) \cdot QP \qquad (1.12)$$

Adică viteza de alunecare este proporțională cu suma vitezelor unghiulare și cu distanța QP. Evident viteza de alunecare este nulă atunci când QP=0 adică punctele Q și P coincid (punctul de contact Q se află în polul P al angrenării).

Respectarea legii angrenării pe figura 1.18 cel puțin local în jurul punctului Q, implică faptul că figurile plane nu pot avea orice formă. În cazul a două roți dințate cilindrice este clar că legea angrenării determină forma curbei generatoare G (figura 1.17).

1.3 STUDIU ASUPRA GEOMETRIEI CURBEI GENERATOARE

Fie o transmisie prin curele incrucișate conform figurii 1.19, din care reținem o singură ramură, conform figurii 1.20.

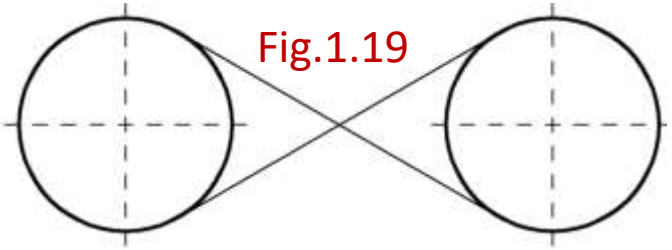

Fig.1.19

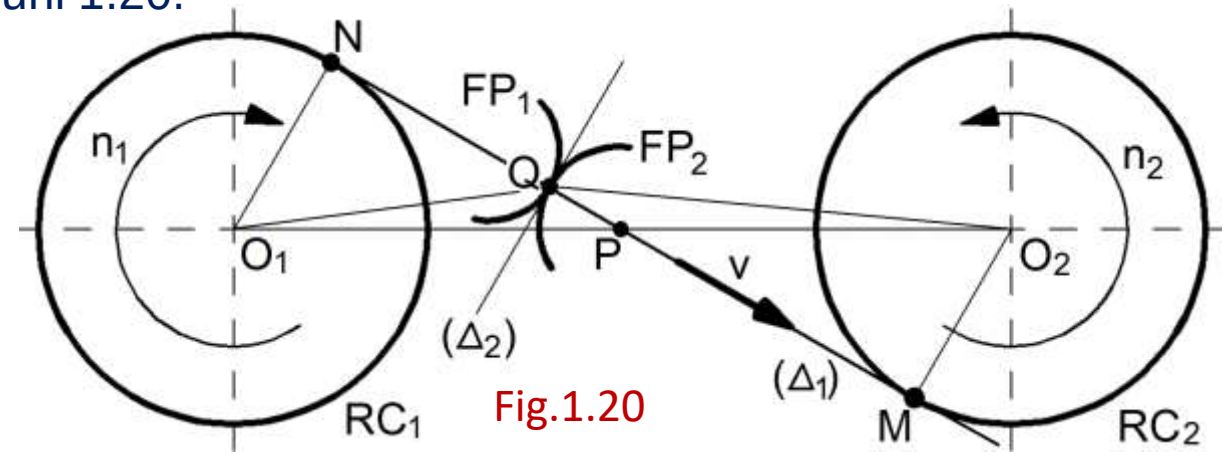

Fig.1.20

Fie roata de curea RC_1 conducătoare pe sensul din figura 1.20. Evident transmisia nu funcționează, porțiunea de curea dintre punctele M și N ar trebui să lucreze la compresiune (putem trage un obiect cu ajutorul unei curele, dar evident nu îl putem împinge!).

Ne propunem să suplinim această incompresibilitate a firului prin utilizarea a două figuri plane rigide: FP_1 (solidară cu roata RC_1) respectiv FP_2 (solidară cu roata RC_2) aflate în contact în punctul Q plasat pe segmentul MN, care are și rolul de normală comună la FP_1 și FP_2. Local, temporar, efectul de împingere, cu dezvoltarea vitezei v este astfel asigurat, ca și cum cureaua ar permite compresiune.

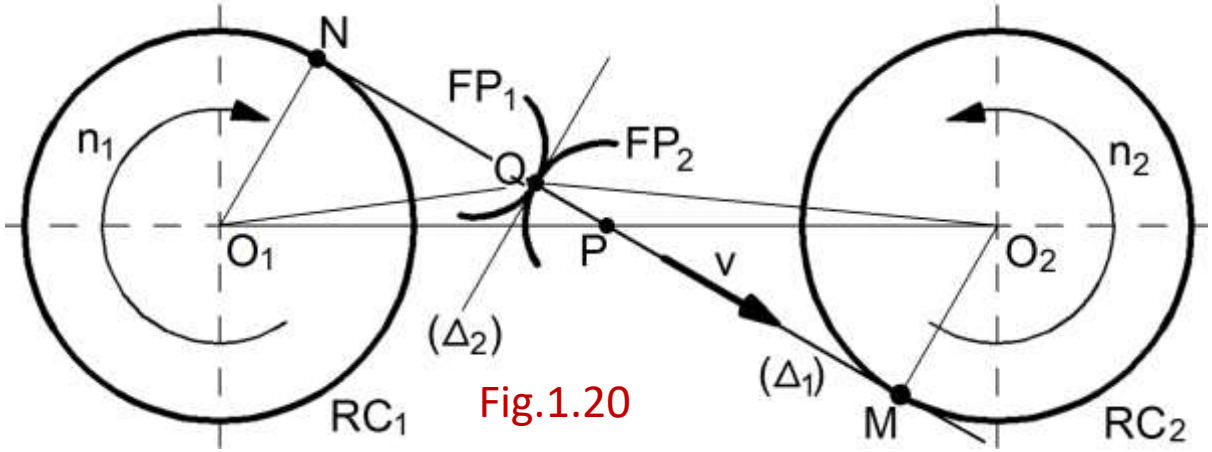

Fig.1.20

Un studiu comparat al figurilor 1.20 și 1.21 (reluare a figurii 1.18) arată că practic ne aflăm în condițiile introduse la enunțarea legii angrenării.

Cea mai interesantă consecință aici este determinarea formei figurilor plane FP_1 și FP_2 care asigură păstrarea punctului de tangență Q permanent pe dreapta (Δ_1) și intersecția acesteia cu dreapta O_1O_2 în P (ca punct fix, poziția sa depinde geometric de de raportul razelor roților $O_1P/ O_2P=O_1N/O_2M$).

Evident, trebuie de asemeni să se asigure deplasarea punctului Q cu viteză constantă v pe dreapta (Δ_1). Această viteză are expresia $v=2\cdot\pi\cdot n_1\cdot O_1N$, cu $2\cdot\pi\cdot n_1=\omega_1$ viteza unghiulară a roții RC_1, sau $v=2\cdot\pi\cdot n_2\cdot O_2M$, cu $2\cdot\pi\cdot n_2=\omega_2$ viteza unghiulară a roții RC_2.

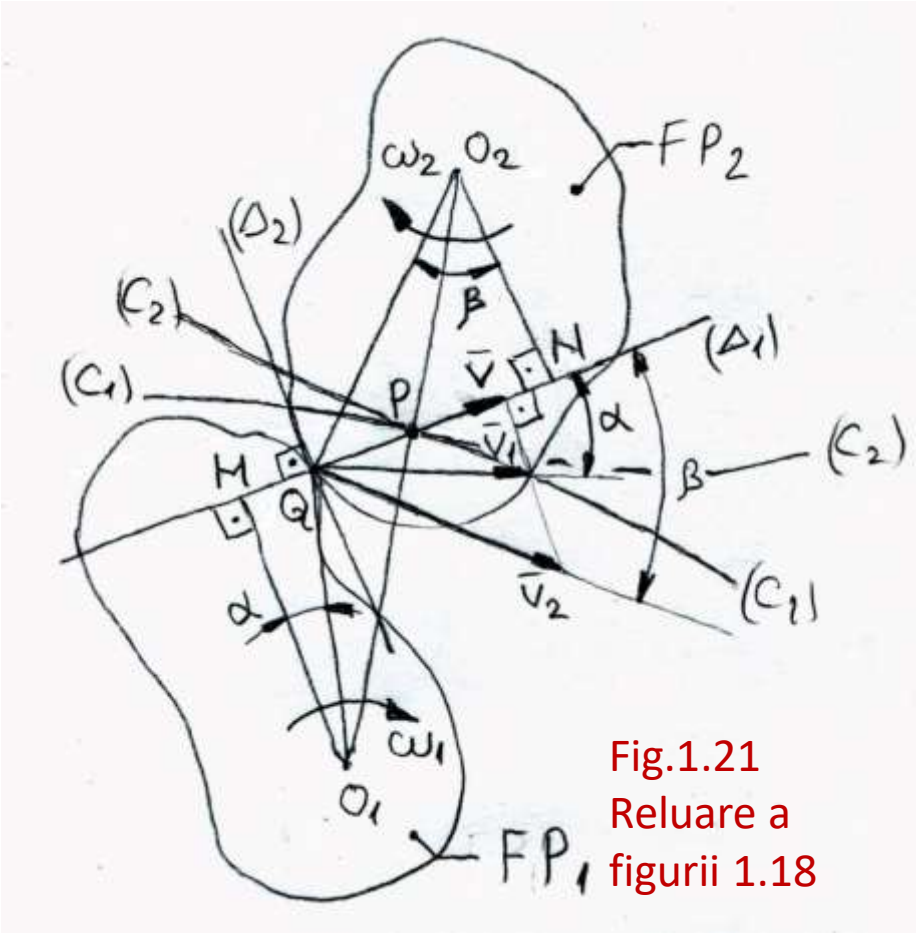

Fig.1.21
Reluare a figurii 1.18

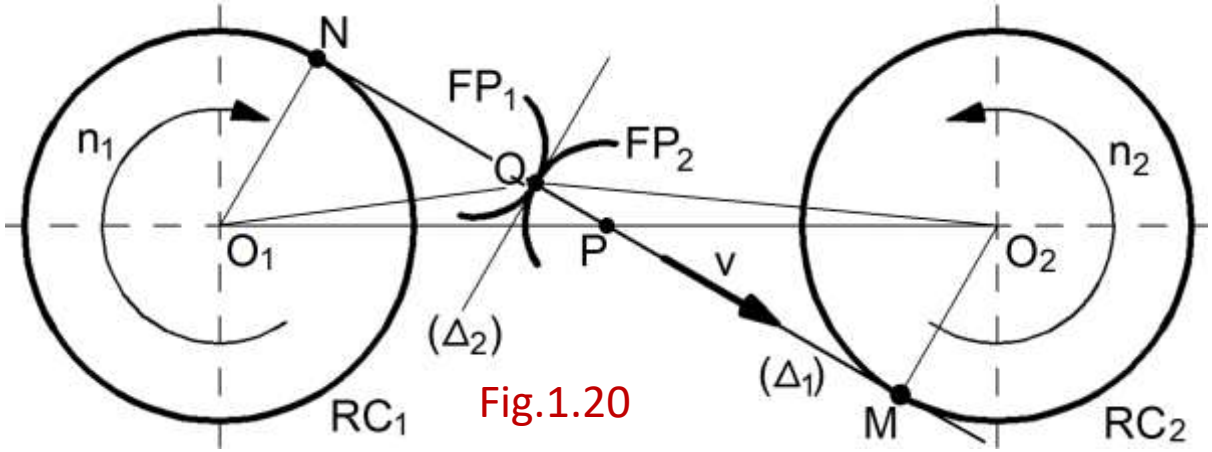

Fig.1.20

Figura plană FP_1 este chiar traiectoria descrisă de punctul Q într-un plan solidar cu roata RC_1.

Figura plană FP_2 este chiar traiectoria descrisă de punctul Q într-un plan solidar cu roata RC_2.

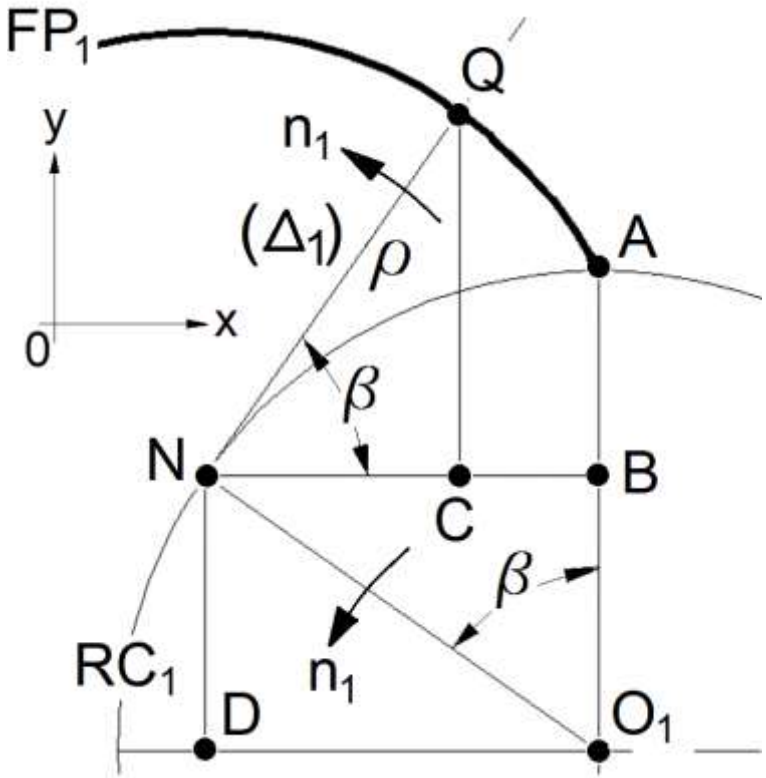

Fig.1.21

Fie conform figurii 1.21 un studiu privind generarea figurii plane FP_1. Un observator plasat pe roata RC_1 trebuie să perceapă generarea figurii plane FP_1 ca traiectorie a punctului Q cu considerațiile din figura 1.21.

Pentru acest observator roata RC_1 este fixă. El vede dreapta (Δ_1) în tangență în N cu cercul RC_1. În același timp dreapta (Δ_1) se rostogolește peste cerc împreună cu segmentul O_1N, cu turația n_1, în sens contrar celui din figura 1.20. Punctul Q se depărtează față de punctul N în lungul dreptei (Δ_1) cu viteza v și se rotește odată cu dreapta în jurul acestui punct.

Punctul N este centru instantaneu de rotație pentru dreapta (Δ_1). În aceste condiții punctul Q descrie figura plană FP_1 (care începe în A, parcursă în sensul creșterii lungimii arcului QA), a cărei descriere analitică ne propunem să o determinăm.

Fie sistemul x0y cu originea 0 plasată în O_1. Fie β unghiul dintre segmentele O_1 A și O_1 N. În condițiile unei rostogoliri pure a dreptei (Δ_1), plecând din originea A a FP_1 (atunci când N, Q și A coincid iar $\beta=0$), pentru un unghi oarecare β (conform figurii 1.21) punctul N a parcurs arcul AN pe cercul RC_1 (de rază r) și segmentul QN (de lungime ρ) pe dreapta (Δ_1) iar punctul Q a parcurs arcul de curbă AQ pe FP_1. Evident arcul AN (de lungime $r\beta$) este egal cu segmentul QN (de lungime ρ).

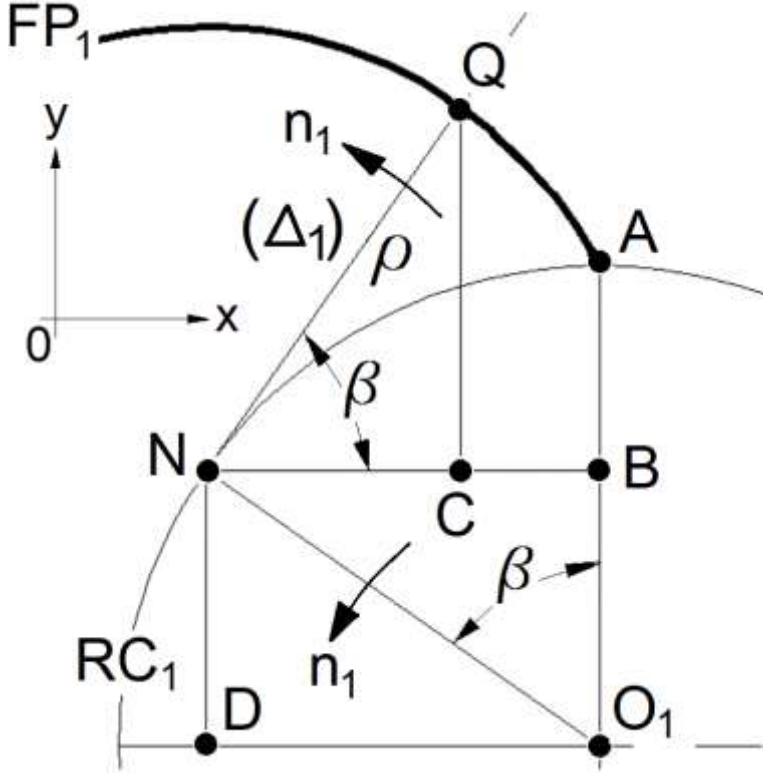

Fig.1.21

Se poate scrie astfel o egalitate simplă:

$$\rho = r\beta \qquad (1.13)$$

Relația (1.13) conține două variabile dependente, o distanță (ρ) și un unghi (β). Această relație este de fapt chiar ecuația figurii plane FP_1 în **coordonate polare**, adică poziția $\rho = \rho(\beta)$ a punctului Q în sistemul cu originea în N și unghiul raportat la orizontala prin N (paralelă cu abscisa 0x, pe segmentul NB).

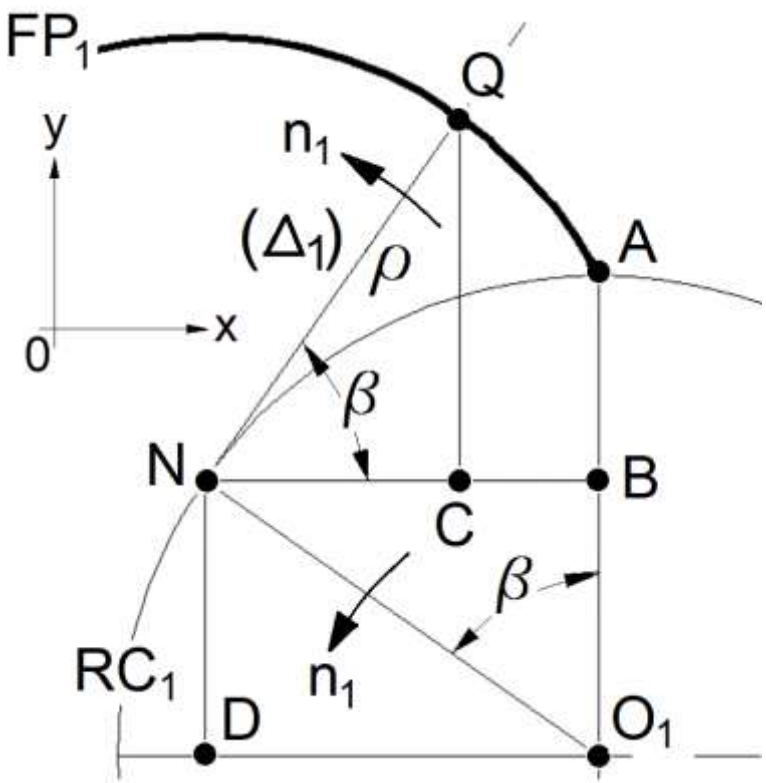

Fig.1.21

Ecuația (1.13) descrie o curbă plană FP_1 numită **evolventă** sau încă developantă sau încă desfășurata cercului. O descriere mai simplă a evolventei se poate face față de un sistem cu originea fixă (de exemplu x0y, cu originea în O_1.) în coordonate carteziene. Abscisa x=-CB a punctului Q în acest sistem mai poate fi scrisă (cu CB=NB-NC) ca x=-NB+NC sau, din rațiuni geometrice evidente, ca:

$$x = \underbrace{-r \cdot sin(\beta)}_{NB} + \underbrace{\overbrace{r \cdot \beta}^{\rho} \cdot cos(\beta)}_{NC} \qquad (1.14)$$

Ordonata $y=BO_1+QC$ a punctului Q în acest sistem mai poate fi scrisă similar, din rațiuni geometrice evidente, ca:

$$y = \underbrace{r \cdot cos(\beta)}_{BO_1} + \underbrace{\overbrace{r \cdot \beta}^{\rho} \cdot sin(\beta)}_{QC} \qquad (1.15)$$

Relațiile (1.14) și (1.15) sunt de fapt ecuațiile parametrice ale evolventei (cu parametrul β) în **coordonate carteziene**, față de un reper x0y fix, cu originea în O_1 și cu semiaxa 0x către dreapta.

Este important de precizat faptul că unghiul β se exprimă obligatoriu în radiani.

O simulare Matlab a evolventei se prezintă în figura 1.22, ca rezultat al rulării programului **evolv1**, redat mai jos:

```
Program evolv1
clear all;close all;rb=100;
        %desenare cerc
k=1;
for i=0:0.01:2*pi;
x(k)=rb*cos(i);y(k)=rb*sin(i)
k=k+1;
end
plot(x,y,'b','LineWidth',1.5;
hold on
clear x;clear y;
      %desenare evolventa
k=1;
for i=0*pi:.001:0.7*pi
x(k)=-rb*sin(i)+rb*i*cos(i);
y(k)=rb*cos(i)+rb*i*sin(i);
k=k+1;
end
plot(x,y,'b','LineWidth',1.5);
grid
axis equal
```

Ecuațiile parametrice ale cercului

Ecuațiile (1.14) și (1.15)

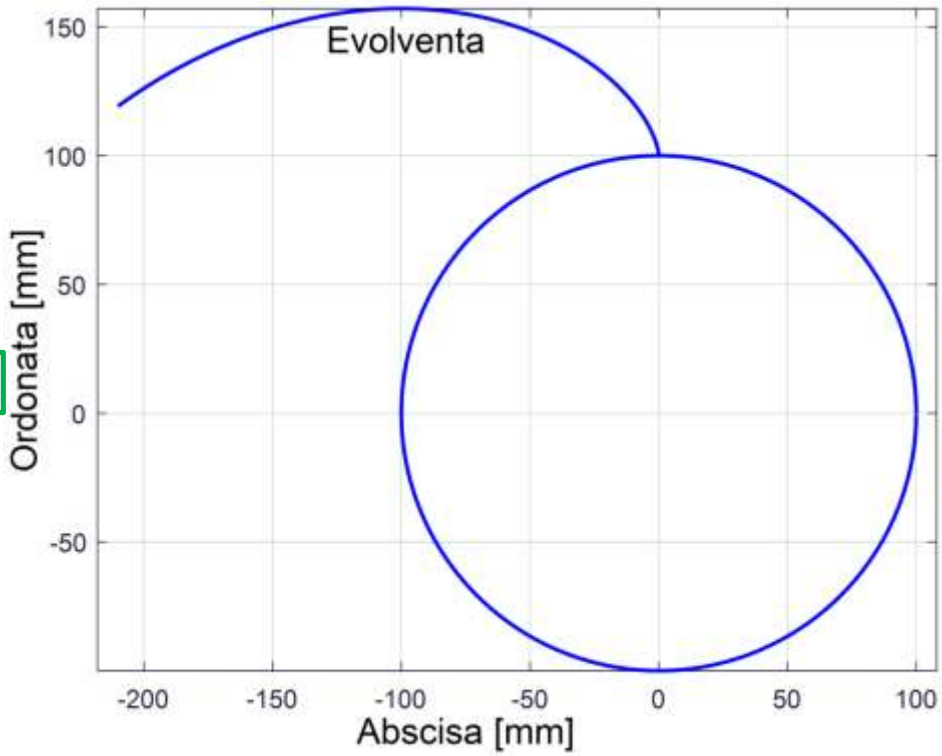

Fig.1.22

În zona marcată cu verde se prezintă ecuațiile parametrice ale cercului RC_1 (s-a folosit notația `rb` pentru raza r). În zona marcată cu roșu se prezintă maniera de scriere a ecuațiilor (1.14) și (1.15), în care s-a folosit notația `i` pentru unghiul β.

Să notăm că reprezentarea evolventei din figura 1.22 este parțială, de fapt (conform figurii 1.23) aceasta are două ramuri, una pe stânga (RS, deja reprezentată în figura 1.22 corespunzător evoluției pozitive a unghiului β) și una pe dreapta, (RD conform figurii 1.23 corespunzător evoluției negative a unghiului β).

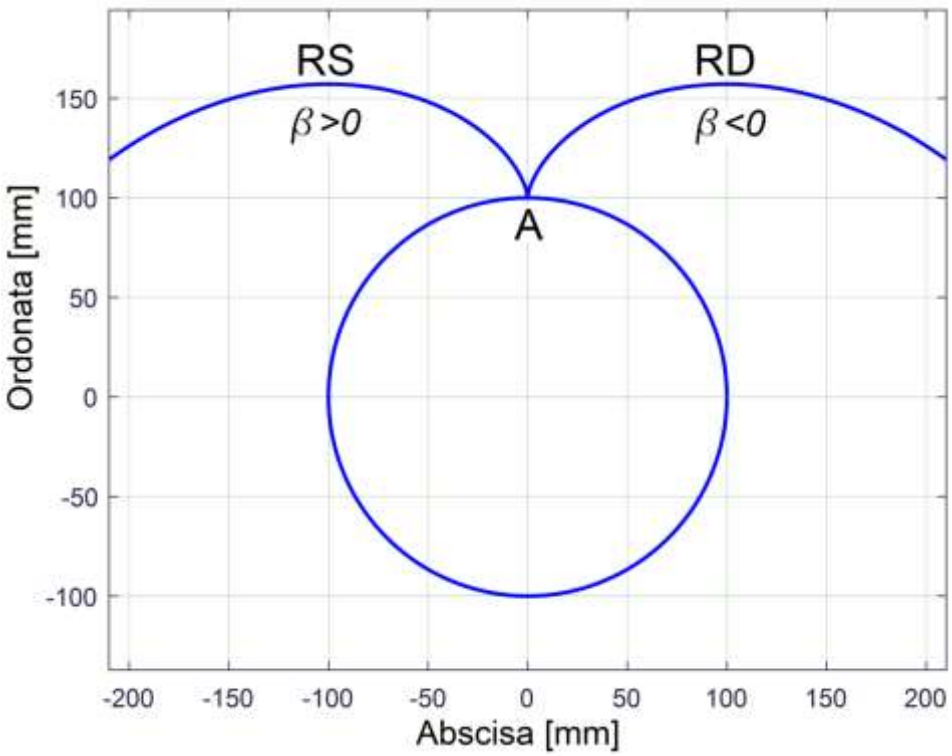

Fig.1.23

Reprezentarea din figura 1,23 s-a obținut prin rularea programului **evolv1** în care s-a înlocuit instrucțiunea marcată cu caractere îngroșate **`for i=0*pi:.001:0.7*pi`** (de prescriere a limitelor unghiului β, aici numai cu valori pozitive) cu instrucțiunea **`for i=-0.7*pi:.001:0.7*pi`** (de prescriere a limitelor unghiului β, aici cu valori pozitive și negative). Practic evolventa este o funcție (curbă) **cu punct de întoarcere** (în A).

Considerații similare conduc la concluzia că și FP_2 este tot o evolventă.

Ne propunem acum să realizăm o simulare a figurii 1.20, pentru a observa dacă evolventa satisface cu adevărat legea angrenării, altfel spus dacă punctul Q de tangență a celor două evolvente care materializează $F1_2$ și FP_2 se plasează permanent pe dreapta (Δ_1) atunci când cele două roți RC_1 și RC_2 (având de exemplu aceeași rază r) se rotesc simultan (de exemplu cu aceleași turații, $n_1=n_2$). .

Programul Matlab **simfig1p20a** (cu listing-ul disponibil în folderul cursului, **pentru studiu facultativ**) permite această simulare, pentru diferite poziții ale celor două roți. După debutul rulării se obține grafic câte o poziție relativă a celor două evolvente după fiecare apăsare pe o tastă oarecare pentru cursa lui Q în ambele sensuri (cu roata RC_1 conducătoare în sens orar, apoi cu roata RC_1 condusă).

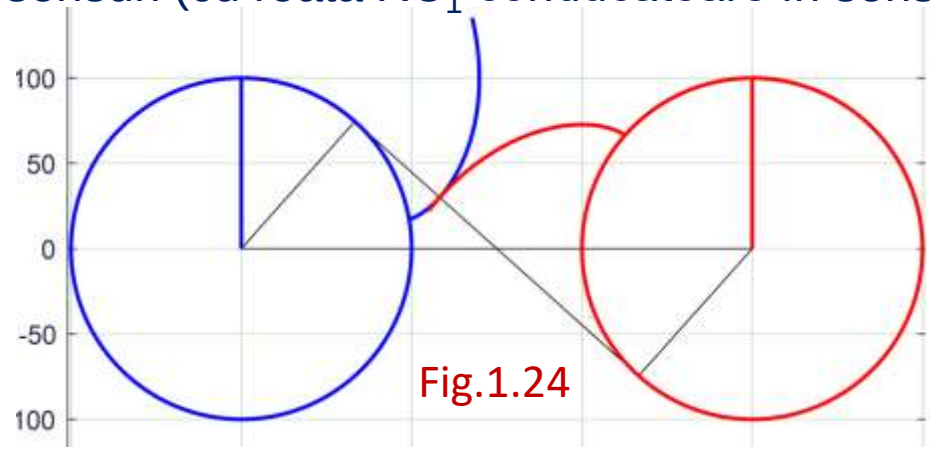

Fig.1.24

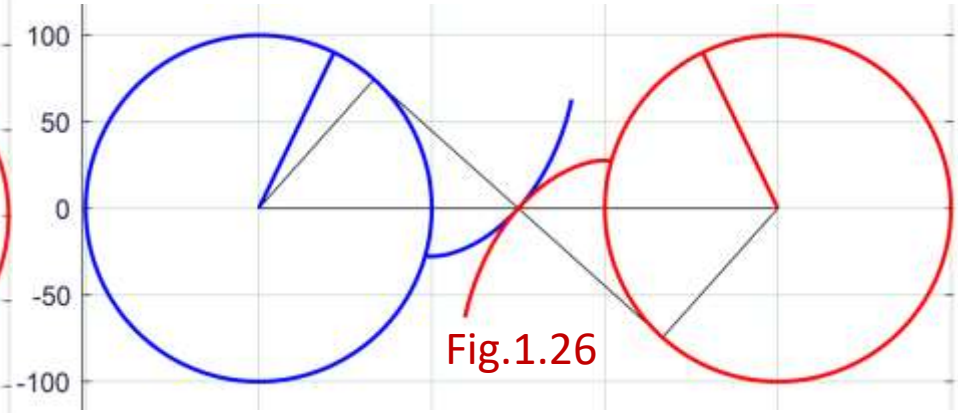

Fig.1.26

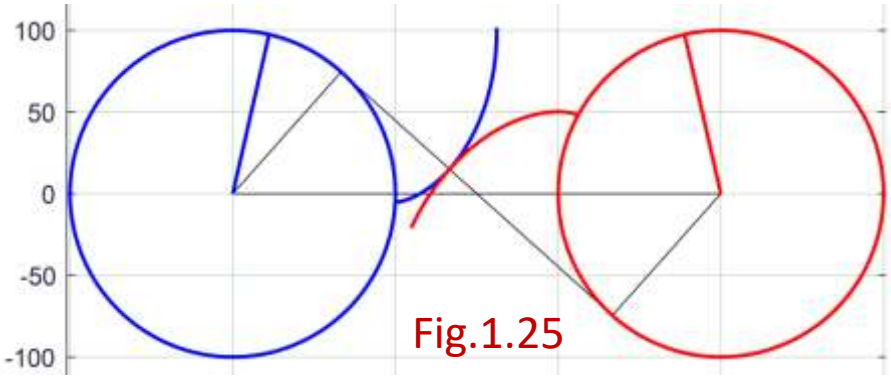

Fig.1.25

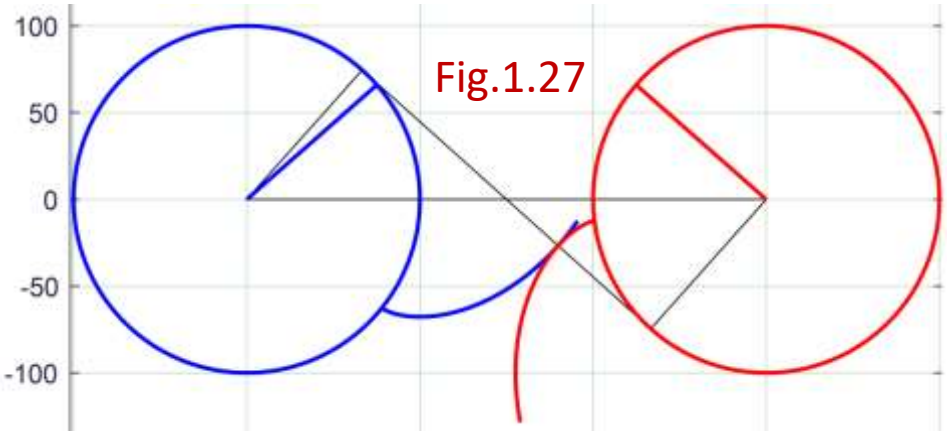

Fig.1.27

Figurile 1.24 ÷ 1.27 prezintă câteva poziții unghiulare succesive ale celor două roți. Pentru fiecare dintre ele se observă faptul că punctul Q se plasează permanent pe dreapta (Δ_1), a se revedea reprezentarea din figura 1.20. În figura 1.26 punctul Q se plasează chiar în polul P al angrenării.

Simulările din figurile 1.24÷1.27 utilizează roata RC_1 conducătoare pentru rotația acesteia în sens orar și roata RC_1 condusă pentru rotația în sens antiorar. Se utilizează ramura stânga (RS) a evolventelor (aici identice) pe ambele roți. Programul Matlab **simfig1p20a1** (cu listing-ul disponibil în folderul cursului, **pentru studiu facultativ**) permite simularea continuă a acestei situații de funcționare. De fapt aici se ilustrează chiar angrenarea a două roți dințate pentru un spațiu unghiular limitat.

Dacă ne propunem obținerea situației complementare (roata RC_1 conducătoare pentru rotația acesteia în sens antiorar și roata RC_1 condusă pentru rotația în sens orar) evident trebuie utilizată ramura dreaptă a evolventei (RD) pe ambele roți.

Programul Matlab **simfig1p20b** (cu listing-ul disponibil în folderul cursului, **pentru studiu facultativ**) permite această simulare, pentru diferite poziții ale celor două roți. După debutul rulării se obține grafic câte o poziție relativă a celor două evolvente după fiecare apăsare pe o tastă oarecare pentru cursa lui Q în ambele sensuri (cu roata RC_1 conducătoare în sens antiorar, apoi cu roata RC_1 condusă).

Programul Matlab **simfig1p20b1** (cu listing-ul disponibil în folderul cursului, **pentru studiu facultativ**) permite simularea continuă a acestei noi situații de funcționare. Și aici se ilustrează chiar angrenarea a două roți dințate pentru un spațiu unghiular limitat.

Vă mulţumesc!