Cap. 13. Derivarea/integrarea numerică a semnalelor experimentale

13.1 Generalităţi

În cercetarea experimentală există situaţii practice în care se impune derivarea sau integrarea unui semnal experimental. De exemplu, prin derivare, dintr-un semnal de descriere a evoluţiei temporale a vitezei se poate deduce evoluţia temporală a semnalului de descriere a acceleraţiei şi reciproc: prin integrare, dintr-un semnal de descriere a evoluţiei temporale a acceleraţiei se poate deduce evoluţia temporală a semnalului de descriere a vitezei.

Asemănător, prin integrare, din semnalul de descriere a deplasării se poate obţine semnalul de evoluţie a vitezei.

Tradiţional, până în momentul apariţiei sistemelor de calcul numeric, derivarea şi integrarea semnalelor se făcea în format exclusiv analogic, cu dispozitive electronice specializate.

13.2 Aspecte ale derivării numerice

Fie descrierea evoluţiei temporale ***y(t)*** a unei funcţii dependente de timp. Derivata acestei evoluţii în raport cu timpul se prezintă în forma teoretică:

(13.1) $$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

În condiţiile descrierii numerice a acestei funcţii prin valorile discrete: $y_1, y_2, ...y_i, y_{i+1}, ...y_n$ la momentele de timp (parametrul funcţiei): $t_1, t_2, ...t_i, t_{i+1}, ...t_n$,expresia (13.1) se poate aproxima prin diferenţe finite cu expresia generică:

(13.2) $$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{cu } i = 2 \div n$$

De regulă numitorul ultimei forme a expresiei (13.2) este chiar timpul de eşantionare (cu $t_i - t_{i-1} = \Delta t$) cel mai adesea constant pentru orice valoare ***i***.

Forma (13.2) a derivatei numerice se poate implementa foarte facil în practică.

Descrierea numerică a derivatei parametrului ***y*** se face cu valorile discrete descrise generic cu expresia:

(13.3) $$\dot{y}_j \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

la momentele de timp descrise generic cu expresia:

(13.4) $$t_j = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$$

cu $j = i-1$ şi $i = 2 \div n$, aici ***n*** fiind numărul total de valori discrete ale funcţiei ***y*** căruia îi corespunde un număr de ***n-1*** valori discrete ale derivatei funcţiei.

Deoarece în derivare intervin câte două valori succesive pentru funcţia ***y***, cea mai corectă descriere a timpului curent se face prin media aritmetică a două valori temporale succesive.

13.3 Ilustrarea derivării numerice prin simulare

Cea mai simplă ilustrare a derivării se poate face pe un semnal cu evoluţie armonică, pe baza programului Matlab cu listing-ul prezentat mai jos.

Program derivare numerică multiplă

```
clear all;close all;k=1;
for i=0:0.01:3
   x(k)=i;y(k)=0+sin(2*i);k=k+1;
end
plot(x,y,'k','LineWidth',1.5);hold on
dim1=size(x);dim=dim1(2)
for i=1:dim-1
   y1(i)=(y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i));x1(i)=x(i)+(x(i+1)-x(i))/2;
end
plot(x1,y1,'k','LineWidth',1.5);hold on;
dim1=size(y1);dim=dim1(2)
for i=1:dim-1
   y2(i)=(y1(i+1)-y1(i))/(x1(i+1)-x1(i));x2(i)=x1(i)+(x1(i+1)-x1(i))/2;
end
plot(x2,y2,'k','LineWidth',1.5);hold on;
dim1=size(y2);dim=dim1(2)
for i=1:dim-1
   y3(i)=(y2(i+1)-y2(i))/(x2(i+1)-x2(i));x3(i)=x2(i)+(x2(i+1)-x2(i))/2;
end
plot(x3,y3,'k','LineWidth',1.5);hold on;grid
```

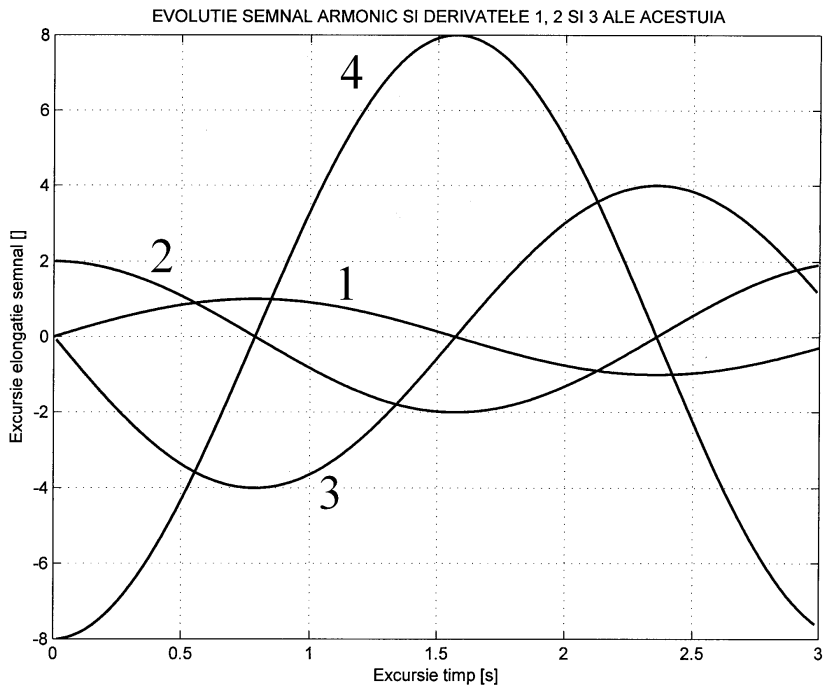

Figura 13.1 *Rezultatul grafic al simulării derivării numerice.*

```
Title('EVOLUTIE
SEMNAL ARMONIC SI
DERIVATELE 1, 2 SI
3 ALE ACESTUIA')
xlabel('Excursie
timp [s]')
ylabel('Excursie
elongatie semnal
[]')
```

Primul ciclu *for-end* calculează elementele necesare reprezentării unui semnal armonic de amplitudine unitară, pulsaţie $\omega = 2$, fază nulă, cu durata de 3 secunde, timpul de eşantionare $\Delta t = 0{,}01\ s$, pentru un număr de $n = 301$ valori discrete. Acest semnal se reprezintă cu instrucţiunea *plot* imediat următoare, curba 1 pe figura 13.1 (în matricea ***x*** se află valorile timpului).

Al doilea ciclu *for-end* calculează valorile discrete ale derivatei de ordin unu ale funcţiei (cu valori numerice aflate în matricea ***y***, cu timpul descris în matricea ***x***). Valorile numerice ale derivatei de ordin unu (calculate pe baza expresiei (13.2)) se depun în matricea ***y1***, valorile numerice ale timpului (calculate pe baza expresiei (13.3)) se depun în matricea ***x1***. Fiecare dintre cele două matrici conţine câte *n - 1 = 300* elemente (valori discrete), corespunzător celor 300 de puncte cu care este definită şi reprezentată grafic derivata de ordinul unu (curba 2 pe figura 13.1, obţinută prin execuţia instrucţiunii *plot* imediat următoare).

O comparaţie între curbele 1 şi 2 demonstrează imediat faptul că maniera de derivare numerică propusă este corectă. Derivata de ordinul unu al unui semnal reprezentat cu curba 1 şi descris cu relaţia:

(13.5) $$\boldsymbol{y = 1 \cdot sin(2 \cdot t + 0)}$$

este reprezentată cu curba 2 şi descrisă cu relaţia:

(13.6) $$\boldsymbol{\dot{y} = 1 \cdot 2 \cdot cos(2 \cdot t + 0)}$$

Se observă faptul că cele două curbe au evoluţie armonică, curba 2 fiind defazată cu 90 de grade (sau decalată temporal cu un sfert de perioadă) faţă de curba 1, având amplitudinea dublă (prin derivare pulsaţia din argumentul funcţiei sinus devine factor de amplificare al amplitudinii iar funcţia sinus se transformă în cosinus).

Pe considerente asemănătoare se poate continua demersul în determinarea derivatelor de ordinul 2 şi 3 (cu următoarele două cicluri *for-end* din program) şi reprezentarea conform curbelor notate cu 3 respectiv 4 (fiecare dintre ele reprezentate cu 299 respectiv 298 puncte unite prin segmente de dreapta). Pe considerentele expuse la comentariul relaţiei (13.6) se observă că pentru fiecare derivare se schimbă faza cu 90° şi se dublează amplitudinea.

Practic dacă curba 1 descrie evoluţia elongaţiei mişcării vibratorii a unui sistem (care se asociază forţei elastice) atunci curba 2 descrie evoluţia vitezei (care se asociază forţei de amortizare vâscoasă) iar curba 3 descrie evoluţia acceleraţiei mişcării (care se asociază forţei de inerţie). Curba 4 (derivata de ordinul 3) nu are semnificaţie fizică (sau dacă are aceasta nu este cunoscută până în prezent).

Validitatea metodei de derivare este confirmată şi de reprezentările din figura 13.2. Curba 1 este descrisă şi reprezentată identic cu curba 1 din figura 13.1. Curbele 2, 3 şi 4 sunt derivatele calculate matematic de ordinul 1, 2 şi 3. Reprezentarea din figura 13.2 a fost obţinută prin rularea programului Matlab cu listing-ul de mai jos:

Program derivare matematică multiplă

```
clear all;close all;k=1;
for i=0:0.01:3
   x(k)=i;y(k)=0+sin(2*i);k=k+1;
end
plot(x,y,'k','LineWidth',1.5);hold on
k=1;clear('x','y');
for i=0:0.01:3
   x(k)=i;y(k)=2*cos(2*i);k=k+1;%derivata de ordinul unu
end
plot(x,y,'k','LineWidth',1.5);hold on
k=1;clear('x','y');
for i=0:0.01:3
   x(k)=i;y(k)=-4*sin(2*i);k=k+1; %derivata de ordinul doi
```

```
end
plot(x,y,'k','LineWid
th',1.5);
 k=1;clear('x','y');
for i=0:0.01:3
   x(k)=i;y(k)=-
8*cos(2*i);k=k+1;
%derivata de ordinul
trei
end
plot(x,y,'k','LineWid
th',1.5);
grid
Title('EVOLUTIE
SEMNAL ARMONIC SI A
DERIVATELOR 1, 2 SI 3
ALE ACESTUIA')
xlabel('Excursie timp
[s]')
ylabel('Excursie
elongatie semnal []')
```

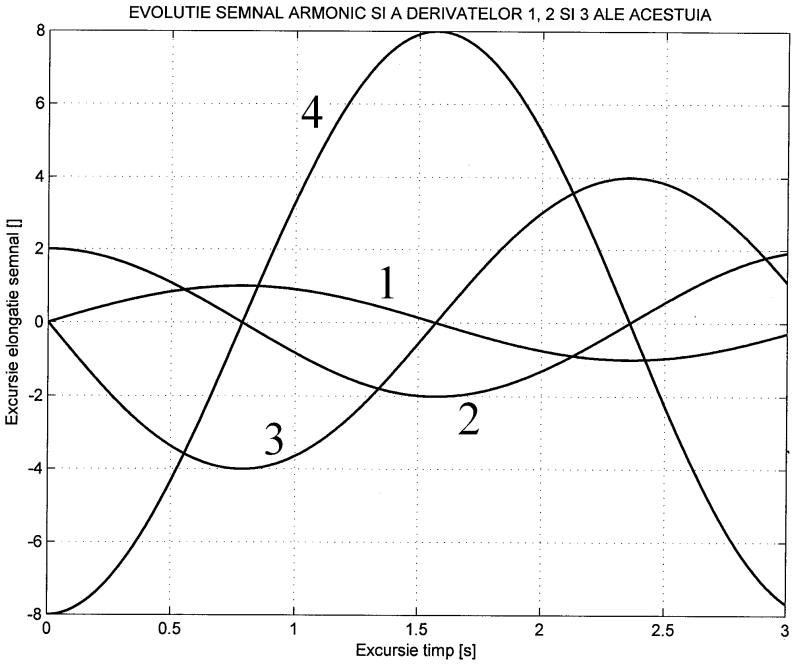

Figura 13.2 *Rezultatul grafic al simulării funcţiilor obţinute prin derivare matematică.*

Evident, figurile 13.1 şi 13.2 sunt identice.

În figura 13.3 se prezintă un semnal rampă/pantă (notat cu 1) precum şi derivata numerică a acestuia (reprezentat cu curba 2). Reprezentările s-au obţinut prin rularea programului Matlab:

Program derivare numerică a unui semnal rampă/pantă

```
clear all;close all;k=1;
for i=0:0.01:4
    x(k)=i;
if i<1;y(k)=10*i;k=k+1;else end
if i>=1;if i<2;y(k)=10-10*(i-1);k=k+1;else end; else end
if i>=2;if i<3;y(k)=10*(i-2);k=k+1;else end; else end
if i>=3;if i<=4;y(k)=10-10*(i-3);k=k+1;else end; else end
end
plot(x,y,'k','LineWidth',1.);hold on
dim1=size(x);dim=dim1(2)
for i=1:dim-1
   y1(i)=(y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i));
   x1(i)=x(i)+(x(i+1)-x(i))/2;
end
plot(x1,y1,'k','LineWidth',1.5);hold on;grid
title('DERIVAREA NUMERICA A UNUI SEMNAL RAMPA/PANTA')
xlabel('Elongatie [ ]')
ylabel('Timp [s]')
```

Secvenţa marcată în program cu caractere îngroşate generează şi reprezintă semnalul rampă/pantă. Secvenţa marcată cu caractere înclinate generează şi reprezintă semnalul derivat numeric. Se observă faptul că un semnal rampă/pantă se transformă prin derivare în semnal rectangular alternant simetric.

Pe figura 13.3 se confirmă considerentele matematice cunoscute: derivata unei funcţii într-un punct este egală cu panta matematică a tangentei la curbă în respectivul punct.

Ca remarcă importantă: o constantă aditivă oarecare ataşată expresiei matematice a unei funcţii nu modifică alura derivatei (derivata unei constante este nulă). Aspectul poate fi exemplificat grafic uşor dacă se rulează programul anterior în condiţiile în care se inserează imediat după secvenţa marcată cu caractere îngroşate de exemplu instrucţiunea `y=y+3;`. Aspectul curbei 2 nu se modifică.

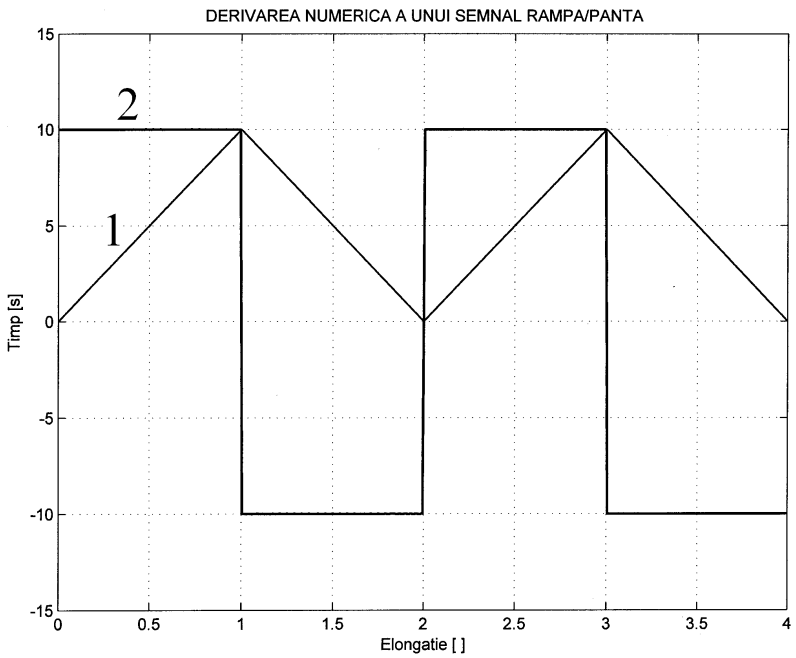

Figura 13.3 *Rezultatul grafic al simulării derivării numerice pentru un semnal rampă/pantă.*

13.4 Valorificare experimentală

Utilitatea derivării numerice a fost foarte bine ilustrată la laborator, în lucrarea referitoare la măsurarea asistată de calculator a turaţiei a arborelui principal de pe strungul SNA 360. Curba 1 de pe figura 13.4 prezintă evoluţia vitezei unghiulare (amplificată de 50 de ori, în rad/s) pentru un ciclu de cuplare (în A) - decuplare (în C) a cutiei de viteze. Ulterior momentului A turaţia creşte progresiv (prin aport de energie cinetică) până la valoarea de palier din B (constantă), ulterior momentului C turaţia scade, prin opririe liberă a cutiei de viteze (disipare a energiei cinetice prin frecări).

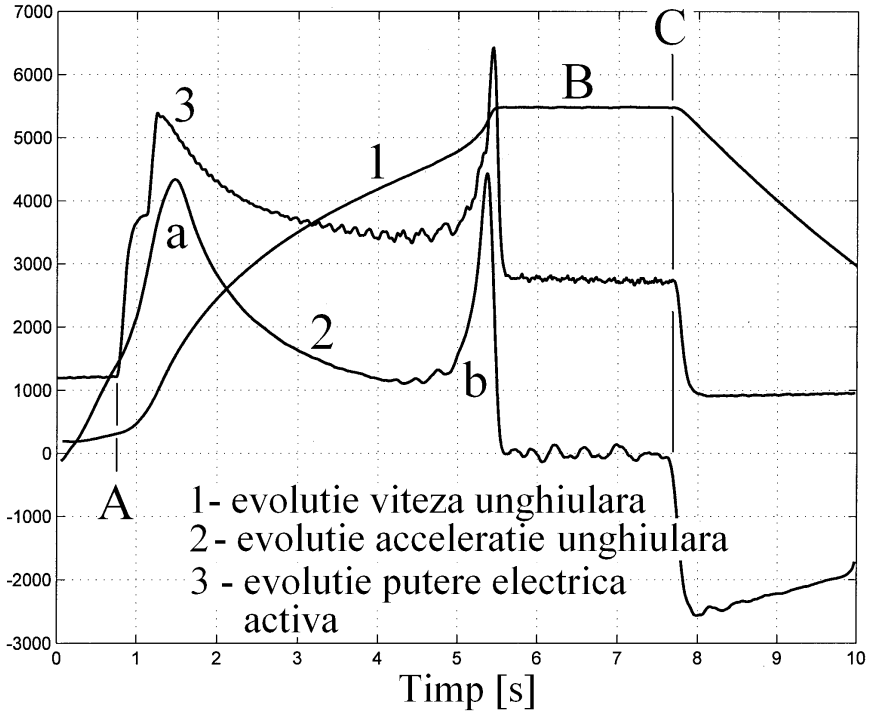

Figura 13.4 *Exemplu de utilizare a derivării numerice în cercetarea experimentală asistată de calculator.*

Curba 2 de pe figură prezintă evoluţia acceleraţiei unghiulare (amplificată de 100 de ori, în rad/s^2) dedusă prin derivare numerică a vitezei unghiulare (curba 1). Şi în acest caz se observă că derivata respectă principiile cunoscute din analiza matematică:

- are valoare pozitivă înainte de instalarea pe palierul B, câtă vreme viteza creşte;

- are valoare negativă după momentul C, asociată cu scăderea vitezei.
- are valoare medie nulă pe palierul B, asociată cu valoarea constantă a vitezei.

Utilitatea determinării numerice a acceleraţiei unghiulare rezultă imediat relativ la curba 3 din figura 13.4 care prezintă evoluţia puterii electrice active absorbite de electromotorul de acţionare a cutiei de viteze în timpul procesului tranzitoriu descris de curba 1 (accelerare, menţinere, decelerare). Prelevarea evoluţiei puterii electrice active a fost tratată teoretic în capitolul 11 şi experimental la laborator. Caracterul evoluţiei puterii electrice active începând din momentul A până la instalarea pe palierul B este strict legat (şi explicat) de caracterul evoluţiei acceleraţiei unghiulare (manifestat pregnant de vârfurile **a** şi **b**). Componenta dinamică a puterii mecanice absorbite de cutia de viteze de la rotorul electromotorului este proporţională cu momentul dinamic. Acest moment dinamic este definit ca produsul dintre momentul de inerţie al cutiei de viteze şi acceleraţie. De aici corelaţia dintre curbele 2 şi 3 pe zona dintre momentul A şi momentul instalării pe palierul B. Aspectul a fost cercetat pe larg la laborator.

Aspectele referitoare la obţinerea grafică a reprezentării din figura 13.4 pe baza datelor experimentale pot fi aprofundate prin studierea folderului Fig.13.4 ataşat capitolului.

13.5 Integrarea numerică

Dacă în capitolul 11 a fost introdusă integrala definită în rezolvarea unei probleme practice, aici vom aborda teoretic integrala nedefinita.

Pornim de la constatarea că integrarea este operaţia matematică cu finalitate inversa derivării. Mai exact spus din funcţia derivată se obţine prin integrare funcţia nederivată. Cu referire la relaţiile (13.2) respectiv (13.3) funcţia derivată (în cazul nostru funcţie de integrat) se găseşte în membrul stâng iar funcţia nederivată (funcţia rezultat al integrării) se găseşte în membrul drept. Relaţia (13.3) poate fi rescrisă ca:

(13.7) $$\dot{y}_j \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \implies y_i \approx \dot{y}_j \cdot (t_i - t_{i-1}) + y_{i-1} \quad \text{cu } j = i - 1$$

Sau reconsiderând ordinea indicilor *i*:

(13.8) $$\dot{y}_j \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \implies y_{i+1} \approx \dot{y}_j \cdot (t_{i+1} - t_i) + y_i \quad \text{cu } j = i$$

Sau schimbând parţial notaţiile din (13.6):

(13.9) $$y_{i+1}^{int} \approx y_i^{dint} \cdot (t_{i+1} - t_i) + y_i^{int}$$

în care y_{i+1}^{int} şi y_i^{int} sunt valoarile curentă şi anterioară a funcţiei rezultat al integrării, iar y_i^{dint} este valoarea anterioară a funcţiei de integrat.

În relaţia (13.9) y_1^{int} nu poate fi definită, ca atare aceasta se va considera ca fiind o constantă oarecare. Aceasta este de fapt constanta de integrare din definiţia integralei nedefinite.

Pentru o mai corectă descriere, în (13.9) se poate considera diferenţa t_{i+1} - t_i substituită prin timpul de eşantionare Δt în descrierea numerică a y^{dint}.

Evident în relaţia (13.9) semnul ≈ devine = dacă $\Delta t = t_{i+1} - t_i \to 0$.

Cu o bună aproximaţie momentul de timp curent al valorii y_{i+1}^{int} poate fi considerat t_{i+1}.

Validitatea relaţiei (13.9) poate fi demonstrată imediat prin simulare grafică, de exemplu rulând programul Matlab:

Program de ilustrare a integrării numerice prin simulare (I)

```
clear all;close all;k=1;
for i=0:0.001:3.5
   x(k)=i;y(k)=0+sin(2*i);k=k+1;
end
plot(x,y,'k','LineWidth',1);hold on
```

Secvenţa de mai sus calculează şi reprezintă un semnal armonic de amplitudine unitară, pulsaţie 2 rad/s şi fază nulă cu timp de eşantionare $\Delta t = 0{,}001s$ (curba 1 pe figura 13.5).

```
dim1=size(x);dim=dim1(2);
for i=1:dim-1
   yd1(i)=(y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i));xd1(i)=x(i)+(x(i+1)-
x(i))/2;xd1(i)=(x(i)+x(i+1))/2;
end
plot(xd1,yd1,'k','LineWidth',1.5);
```

Secvenţa de mai sus calculează şi reprezintă derivata numerică a semnalului generat anterior (curba 2 pe figura 13.5).

```
dim1=size(xd1);dim=dim1(2);
c=0.5;yi1(1)=c;
for i=1:dim-1
   yi1(i+1)=yi1(i)+(xd1(i+1)-xd1(i))*yd1(i);xi1(i+1)=xd1(i)+(xd1(i+1)-
xd1(i))/2;
end
plot(xi1,yi1,'k','LineWidth',1.5);%se genereaza curba 3
grid
xlabel('Timp [s]')
ylabel('Elongatii [ ]')
```

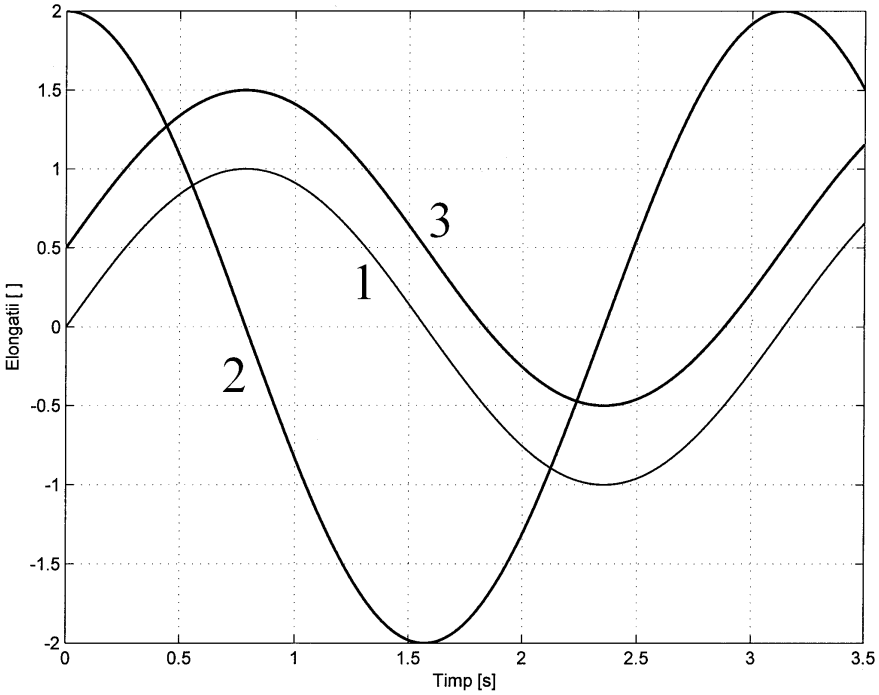

Figura 13.5 *Ilustrare grafică a integrării numerice a unui semnal simulat (I).*

Secvenţa de mai sus calculează şi reprezintă integrarea numerică a semnalului reprezentat în curba 2 pe figura 13.5. Se foloseşte o constantă de integrare egală cu 0,5. Rezultatul integrării este reprezentat în curba 3 pe figura 13.5.

Curba 2 provine din derivarea curbei 1. Curba 3 provine din integrarea curbei 2.

Practic, ignorând efectul constantei de integrare curbele 1 şi 3 coincid (actualmente curba 3 este translată faţă de curba 1 cu constanta de integrare). Aspectul

este evident dacă se rulează programul prescriind valoarea nulă a constantei de integrare (substituind instrucţiunea `c=0.5;` cu instrucţiunea `c=0;`).

Programul anterior este disponibil în folderul cursului (în fişierul fig13p5 din folderul Fig.13.5).

Acesta este cel mai bun argument privind corectitudinea algoritmului de integrare propus anterior.

Revenind la figura 13.3, să observăm că dacă curba 2 a fost obţinută prin derivare numerică a curbei 1 atunci este evident faptul că prin integrarea numerică a curbei 2 trebuie să se obţină curba 1. Aspectul este reliefat prin rularea programului Matlab:

Program de ilustrare a integrării numerice prin simulare (II)

```
clear all;
close all;
k=1;
for i=0:0.001:4
    if i<=1;y(k)=10;else end
        if i>1;if i<=2;y(k)=-10;else end;else end
           if i>2;if i<=3;y(k)=10; else end;else end
                   if i>3;y(k)=-10;else end;
   x(k)=i;k=k+1;
end
plot(x,y,'k','LineWidth',1); % deseneaza semnalul de integrat, curba 1
hold on;dim1=size(x);dim=dim1(2);c=.0;yi1(1)=c;
for i=1:dim-1
   yi1(i+1)=yi1(i)+(x(i+1)-x(i))*y(i);xi1(i+1)=x(i)+(x(i+1)-x(i))/2;
end
plot(xi1,yi1,'k','LineWidth',1.5);%deseneaza semnalul integrat, curba 2
grid
xlabel('Timp [s]');
ylabel('Elongatii [ ]');
axis([0 4 -15 15])
```

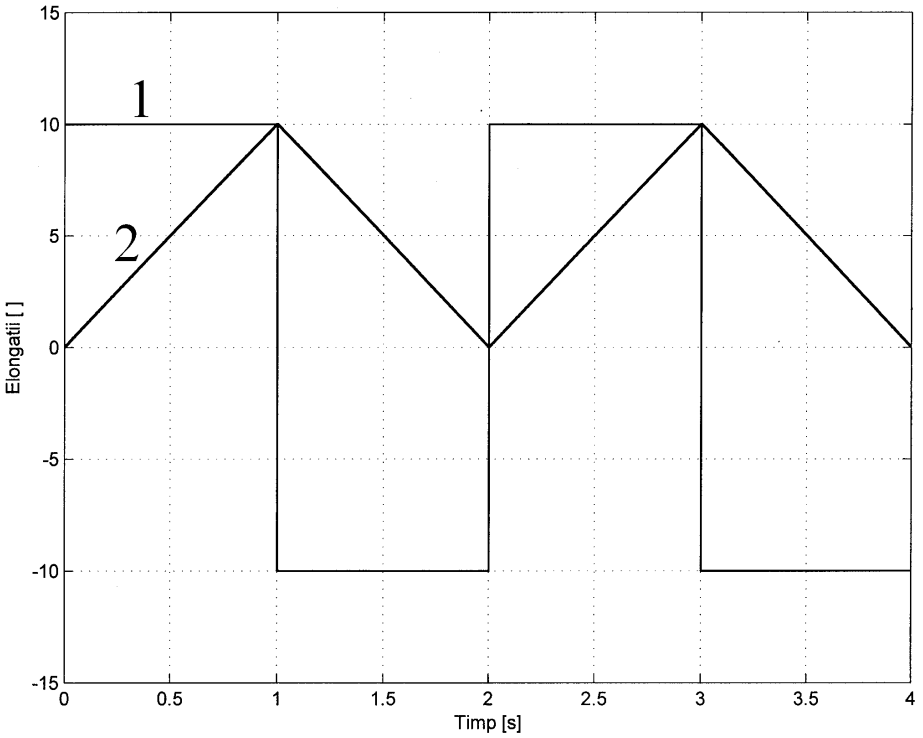

Figura 13.6 *Ilustrare grafică a integrării numerice a unui semnal simulat (II).*

Evident, conform figurii 13.6, integrarea unui semnal rectangular simetric produce un semnal rampă/pantă (aici cu constanta de integrare este nulă). Programul de mai sus este disponibil şi în foderul Fig.13.6. Cititorul interesat poate exersa şi alte oportunităţi ale integrării numerice.

De exemplu, referitor la figura 13.4, se poate încerca obţinerea curbei 1 (de descriere a evoluţiei vitezei unghiulare) prin integrarea numerică a curbei 2 (de descriere a acceleraţiei unghiulare).